

Alessandro Venturelli, Leandro Odella, Monica Bertelli, Elettra Cerruti

Diario di Matematica
Le coniche nel piano cartesiano

Parabola, circonferenza, ellisse ed iperbole



Accademia
della Scienza



ASSOCIAZIONE
ITALIANA
DISLESSIA



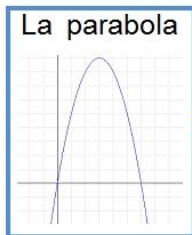
Accademia della Scienza
SOCIETÀ COOPERATIVA SOCIALE

Via dei Mille 2/3 17100 Savona tel. 019-824836
www.accademiadellascienza.it

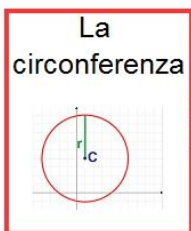


Indice

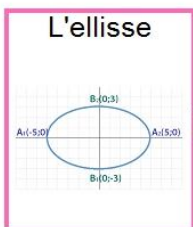
Prefazione	→ Saluti	pag. 3
	→ Contributo AID	pag. 5
Nozioni preliminari		pag. 7
Le coniche		pag. 9



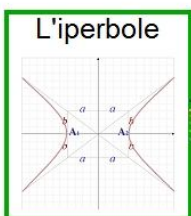
→	Caratteristiche generali	pag.11
→	Casi particolari	pag.14
→	Disegnare una parabola	pag.16
→	Retta e parabola	pag.17
→	Tangenti alla parabola	pag.19
→	Determinare l'equazione di una parabola	pag.22



→	Caratteristiche generali	pag.25
→	Casi particolari	pag.27
→	Disegnare una circonferenza	pag.29
→	Retta e circonferenza	pag.30
→	Tangenti alla circonferenza	pag.34
→	Determinare l'equazione di una circonferenza	pag.37



→	Caratteristiche generali	pag.41
→	Disegnare un'ellisse	pag.43
→	Retta ed ellisse	pag.44
→	Tangenti all'ellisse	pag.47
→	Determinare l'equazione di un'ellisse	pag.49



→	Caratteristiche generali	pag.51
→	Disegnare un'iperbole	pag.53
→	Casi particolari	pag.54
→	Retta e iperbole	pag.56
→	Tangenti all'iperbole	pag.58
→	Determinare l'equazione di un'iperbole	pag.60

Usiamo le mappe		pag. 62
-----------------	--	---------



Accademia della Scienza
SOCIETÀ COOPERATIVA SOCIALE

Via dei Mille 2/3 17100 Savona tel. 019-824836
www.accademiadellascienza.it

Se durante gli anni del liceo qualcuno mi avesse detto che nel giro di qualche anno (o qualcuno in più) avrei pubblicato un libro sull'amata - odiata matematica, l'avrei probabilmente congedato con una risata o mormorando un generico "Dai, non scherzare!"

Dopo la pubblicazione del primo volume, il Diario di matematica per il biennio, testo pensato principalmente per un uso interno ad Accademia della Scienza, l'ente per il quale collaboro da cinque anni, e per una modesta diffusione presso le scuole locali, non avrei mai immaginato che il suo seguito, che tenete tra le mani, fosse il frutto di un progetto nazionale, realizzato con il contributo di docenti di tutto il Paese!

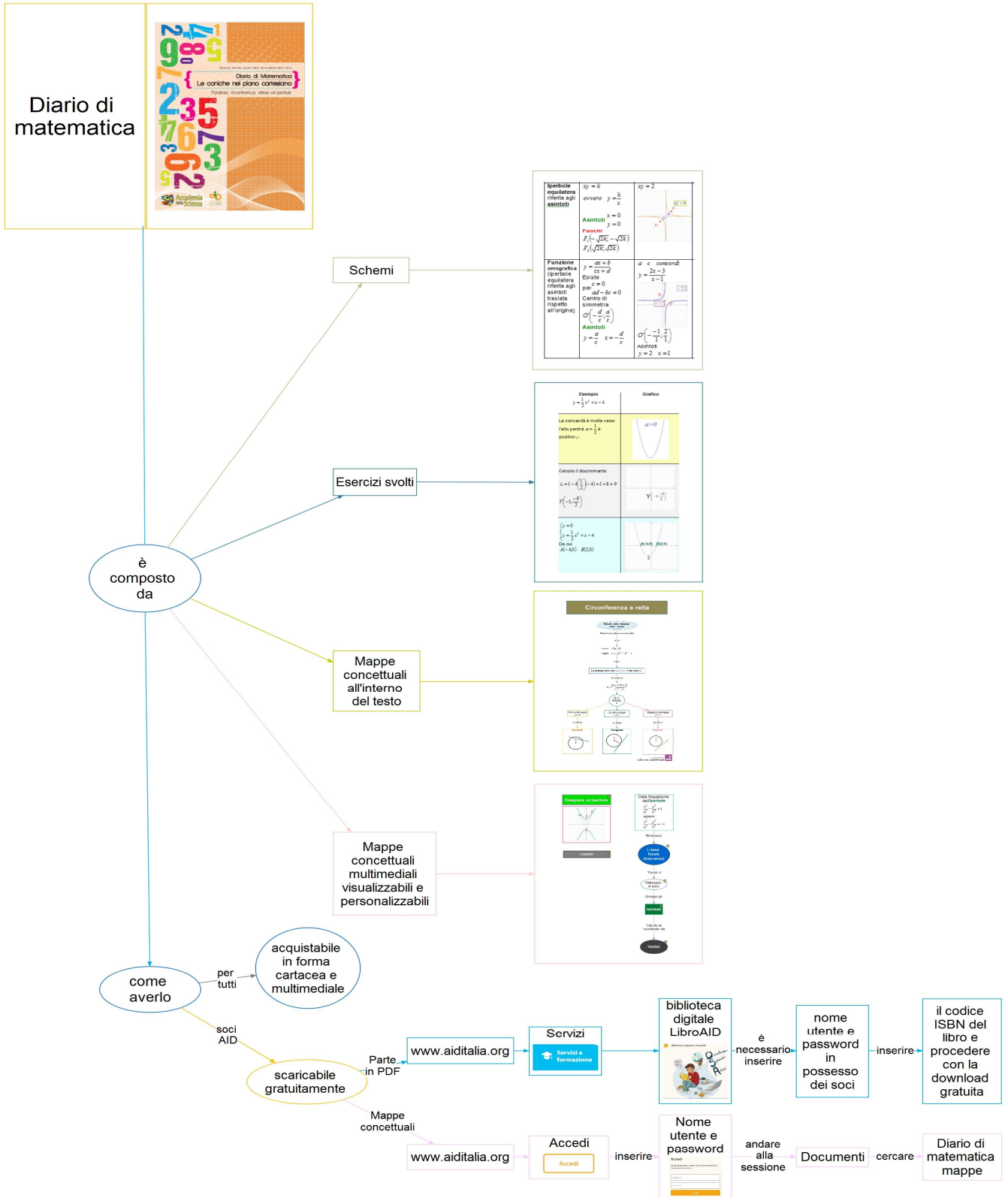
E né ai tempi del liceo, né all'inizio del progetto, avrei mai pensato che la scrittura di queste pagine e la produzione delle rispettive mappe concettuali richiedesse uno sforzo così grande!

Per questo, ancora più grande è il ringraziamento ad i miei compagni di avventura di AID (**Daniela Pighin, Tiziana Gaspari e Adalgisa Colombo**), ad **Elettra Cerruti** per il suo fondamentale ruolo di coordinamento e supervisione, per la disponibilità ad essere disturbata anche in orari improbabili e per l'amicizia dimostrata nei momenti più difficili dell'avventura, al collega ed amico **Leandro Odella** per il sostegno e la pazienza, all'amica **Monica Bertelli** per i suoi preziosi consigli, alla collega, Prof. sa **Laura Piana** per il minuzioso controllo del materiale scritto ed al Prof. **Ottavio Caligaris**, mio docente universitario, che ha limato gli angoli troppo spigolosi del mio linguaggio matematico. L'auspicio migliore che possa augurarmi è che esempi, formule e mappe contenute nel testo possano veramente essere utili per molti studenti a vedere gli esercizi su parabole, circonferenze, rette tangenti ed affini non più come un nemico giurato ma come stimolanti percorsi di apprendimento.

Mi piace, per concludere, ricordare che durante il periodo di gestazione del presente volume, qualcun altro ha visto la luce: il mio piccolo Lorenzo, a cui dedico il Diario di Matematica, per compensare tutte le ninnananne realizzate quasi esclusivamente con le tabelline che gli propongo quotidianamente per farlo (peraltro senza grandi successi) addormentare.

Alessandro Venturelli

Diario di matematica: istruzioni per l'uso





<p>Piano cartesiano</p>	<p>È un piano nel quale è fissato un sistema di riferimento costituito da due rette perpendicolari chiamate asse x e asse y che si intersecano in un punto detto origine. Ogni punto del piano è indicato da una coppia ordinata di valori (ascissa ed ordinata) Equazione asse x (asse delle ascisse): $y = 0$ Equazione asse y (asse delle ordinate): $x = 0$</p>	
<p>Distanza tra due punti</p>	<p>Dati i punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$, la distanza tra A e B è $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ (formula generica)</p>	
<p>Punto medio di un segmento</p>	<p>Dati i punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$, le coordinate del punto medio del segmento AB sono date da $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$</p>	
<p>Retta</p>	<p>Equazione della retta in forma esplicita $y = mx + q$ Dove m è il coefficiente angolare e q l'ordinata all'origine</p> <hr/> <p>Equazione della retta in forma implicita $ax + by + c = 0$</p>	
<p>Equazione della retta passante per due punti</p>	<p>Dati i punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ l'equazione della retta passante per A e B $y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$ Dove $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ è il coefficiente angolare</p>	
<p>Equazione della retta passante per un punto dato il coefficiente angolare</p>	<p>Assegnati il punto $P(x_P; y_P)$ ed il coefficiente angolare m l'equazione della retta per P con coefficiente angolare m è $y - y_P = m(x - x_P)$</p>	



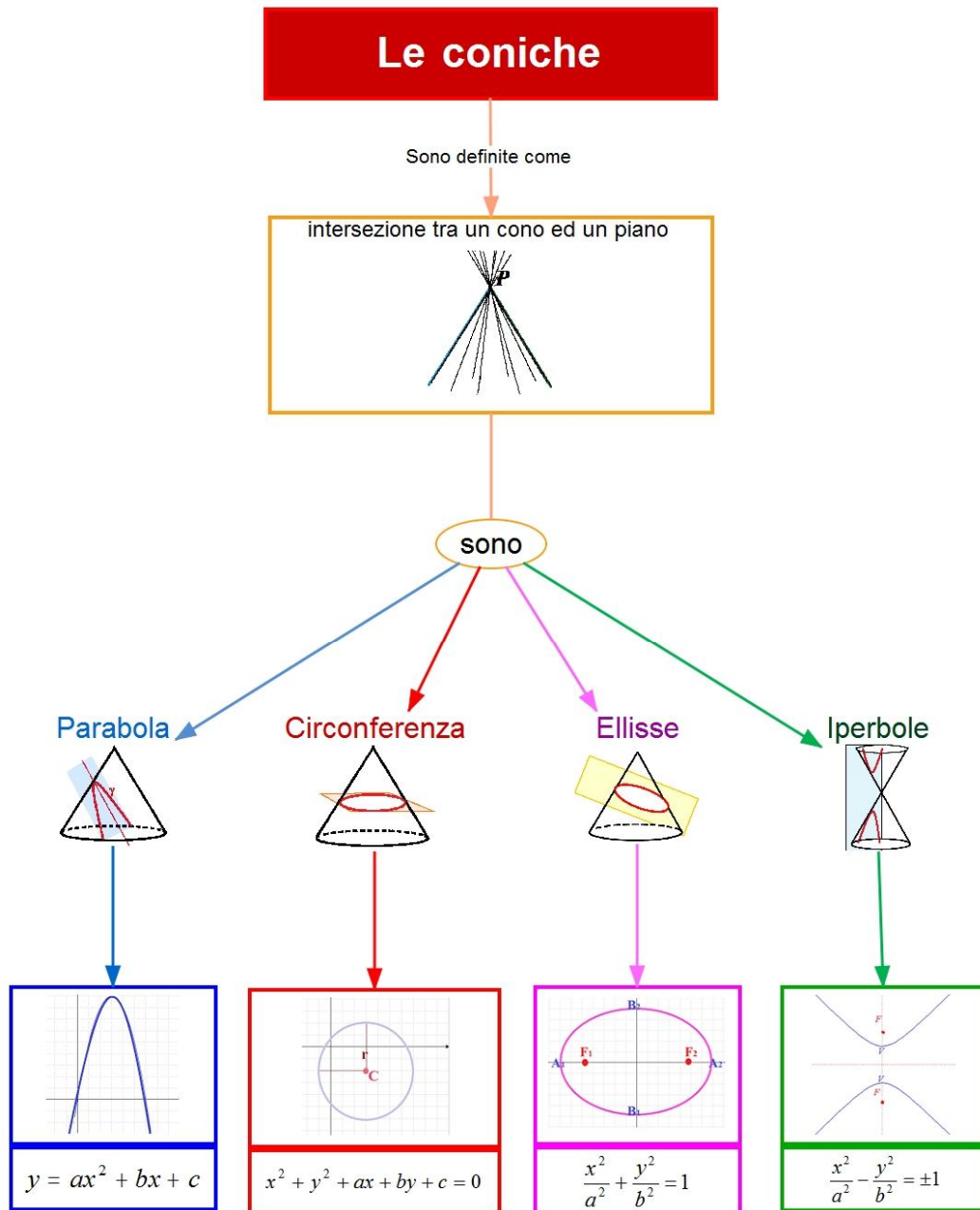
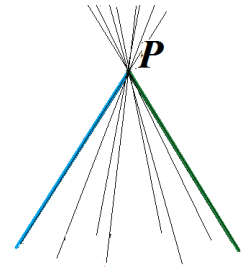
<p>Rette parallele</p>	<p>Due rette sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare</p> $m_1 = m_2$	
<p>Rette perpendicolari</p>	<p>Due rette sono perpendicolari se e solo se hanno il coefficiente angolare reciproco e opposto</p> $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ <p>Ovvero se il prodotto dei loro coefficienti angolari è pari a -1 $m_1 \cdot m_2 = -1$</p>	
<p>Distanza punto - retta</p>	<p>Data la retta in forma implicita $ax + by + c = 0$ ed il punto $P(x_p; y_p)$ la loro distanza si calcola con la formula</p> $d = \frac{ ax_p + by_p + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$	
<p>Fascio di rette proprio</p>	<p>Insieme di tutte le rette del piano che passano per un punto fissato, detto centro del fascio.</p> $y - y_A = m(x - x_A)$ <p>Esempio $y - 1 = m(x - 1)$</p> <p>Posso scrivere il fascio generato da due rette anche come</p> $ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0$ <p>Esempio $3x - y - 8 + k(4x + 2y - 4) = 0$</p> <p>Centro del fascio</p> $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$	
<p>Fascio di rette improprio</p>	<p>Insieme composto da tutte le rette che hanno lo stesso coefficiente angolare.</p> <p>Esempio $y = -2x + k$ è il fascio di rette improprio parallelo alla retta di equazione</p> $y = -2x$	
<p>Equazioni di secondo grado</p>	<p>Completa $ax^2 + bx + c = 0$</p> <p>Pura $ax^2 + c = 0$</p> <p>Spuria $ax^2 + bx = 0$</p>	<p>Soluzioni</p> $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ <p>Soluzioni</p> $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$ <p>Soluzioni</p> $x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{-b}{a}$

Le Coniche

Una conica è l'intersezione tra una superficie conica ed un piano.

Un cono è l'insieme di tutte le rette che congiungono i punti di una circonferenza ad un punto esterno ad essa e giacente su di un altro piano

I casi di conica non degenerare possibili sono: **parabola**, **circonferenza**, **ellisse** ed **iperbole**.



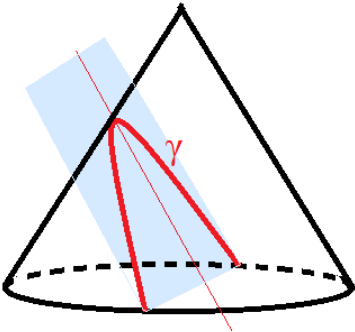
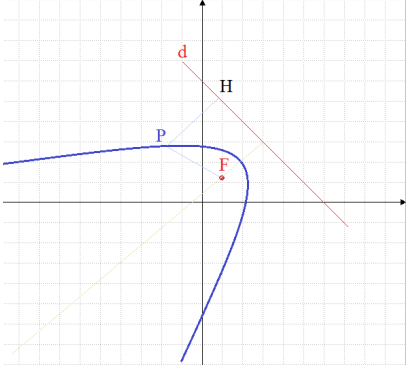


Accademia della Scienza
SOCIETÀ COOPERATIVA SOCIALE

Via dei Mille 2/3 17100 Savona tel. 019-824836
www.accademiadellascienza.it



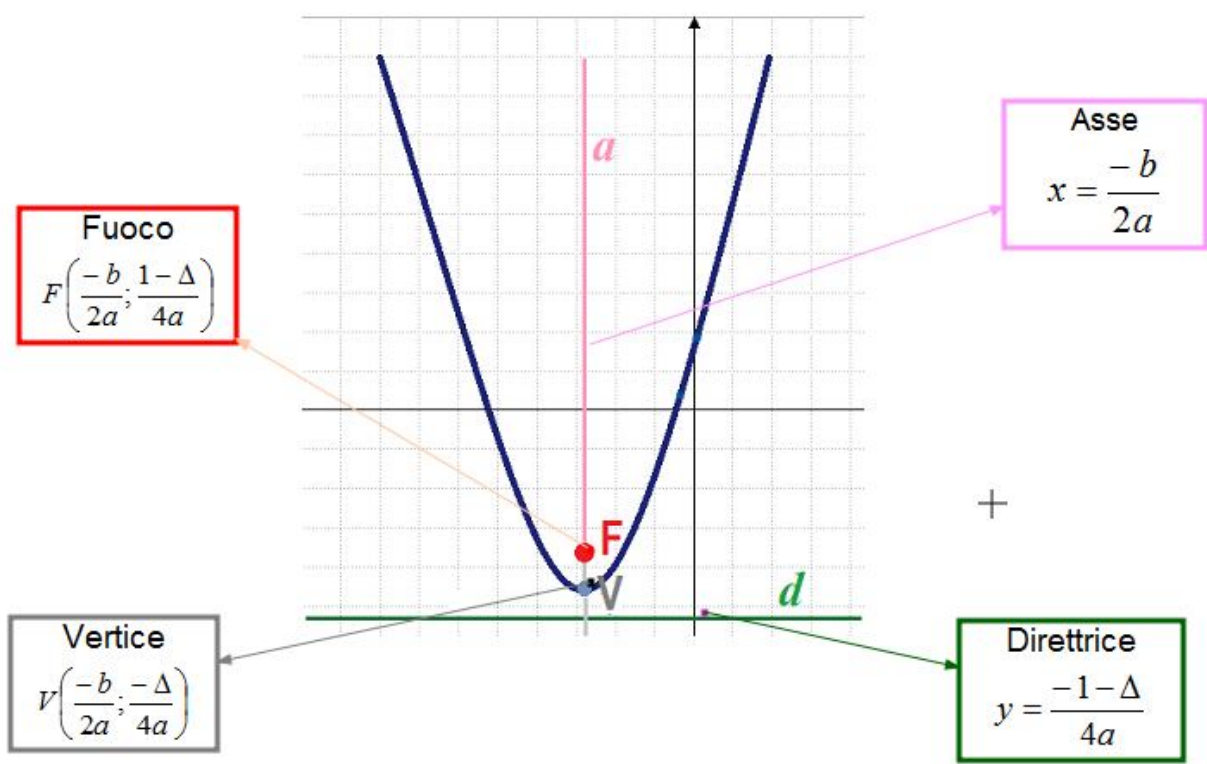
La Parabola

<p>La parabola è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissata detta direttrice.</p> <p>L'asse è la retta perpendicolare alla direttrice passante per il fuoco. Il vertice è l'intersezione della parabola con l'asse.</p>	 <p>Intersezione della superficie conica con un piano</p>	 <p>Caso generico di parabola nel piano</p>
---	--	--

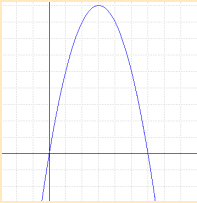
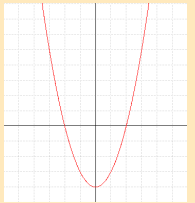
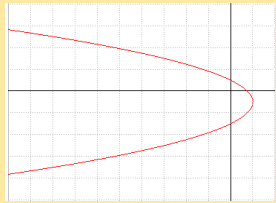
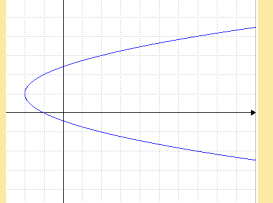
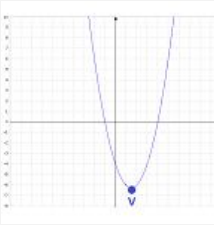
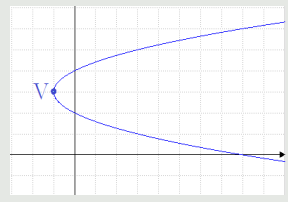
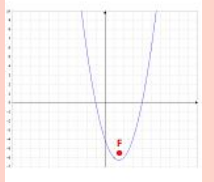
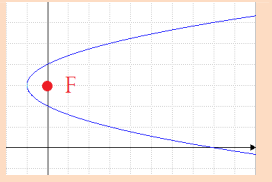
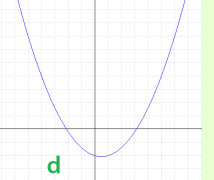
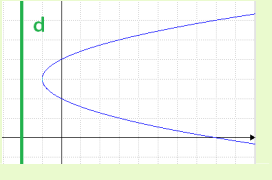
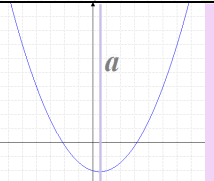
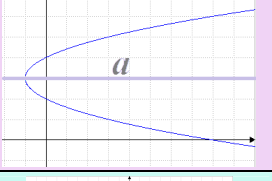
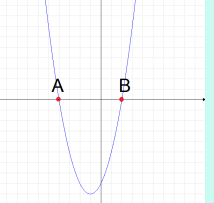
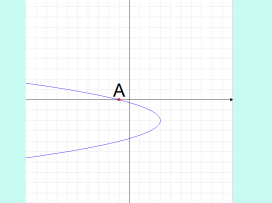
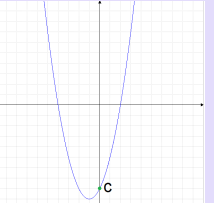
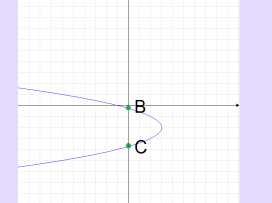
Elementi notevoli di una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate (**asse y**)

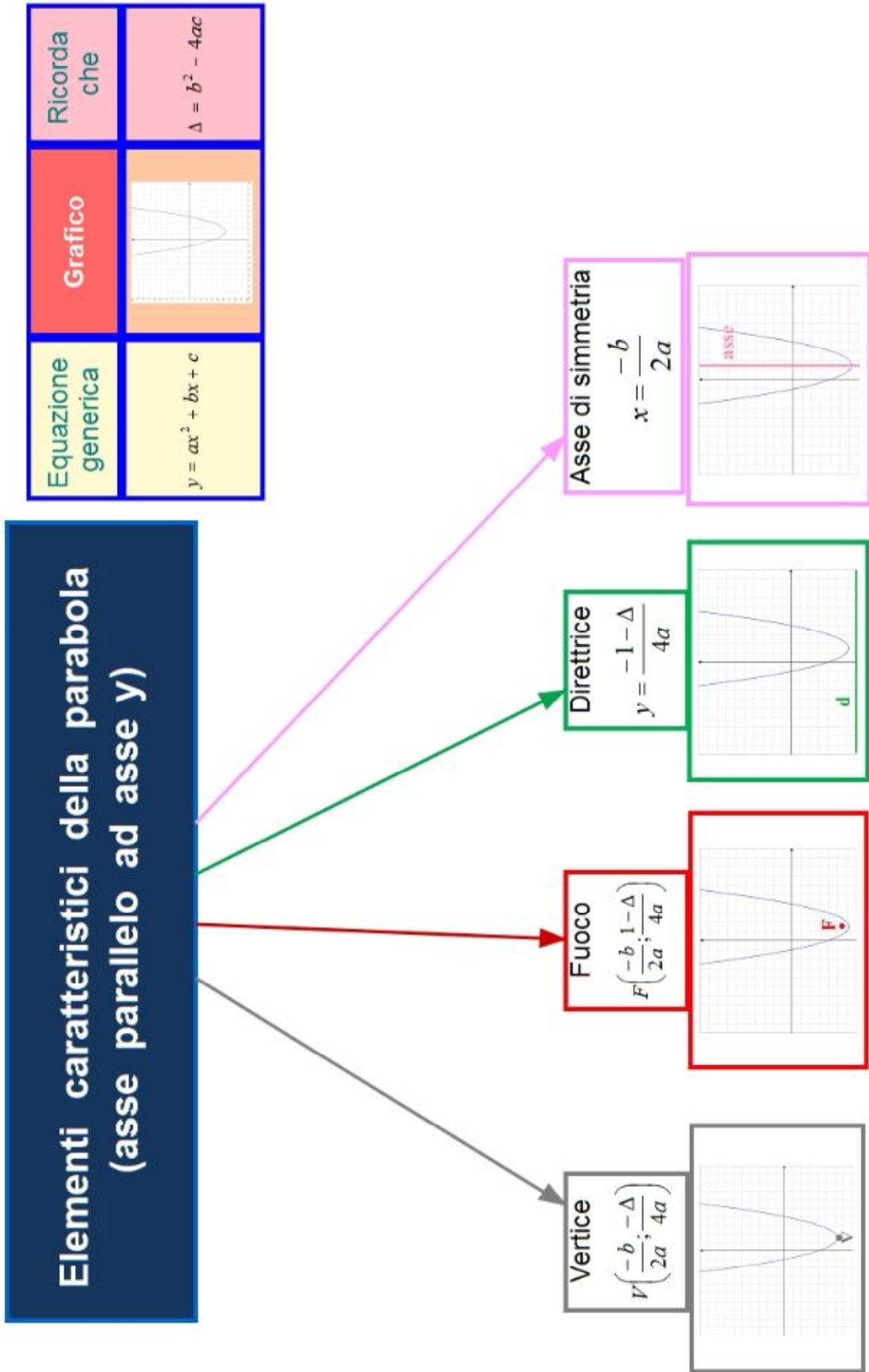
Parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$



Caratteristiche della parabola

	Parabola con asse verticale	Parabola con asse orizzontale		
Equazione generica	$y = ax^2 + bx + c$	$x = ay^2 + by + c$		
Concavità	 $a < 0$	 $a > 0$	 $a < 0$	 $a > 0$
Vertice	$V\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$ $\Delta = b^2 - 4ac$ 	$V\left(\frac{-\Delta}{4a}; \frac{-b}{2a}\right)$ $\Delta = b^2 - 4ac$ 		
Fuoco	$F\left(\frac{-b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ 	$F\left(\frac{1-\Delta}{4a}; \frac{-b}{2a}\right)$ 		
Direttrice	$y = \frac{-1-\Delta}{4a}$ 	$x = \frac{-1-\Delta}{4a}$ 		
Asse di simmetria	$x = \frac{-b}{2a}$ 	$y = \frac{-b}{2a}$ 		
Intersezione con l'asse x	$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$ 	$\begin{cases} x = ay^2 + by + c \\ y = 0 \end{cases}$ 		
Intersezione con l'asse y	$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = 0 \end{cases}$ 	$\begin{cases} x = ay^2 + by + c \\ x = 0 \end{cases}$ 		





Casi particolari dell'equazione di una parabola

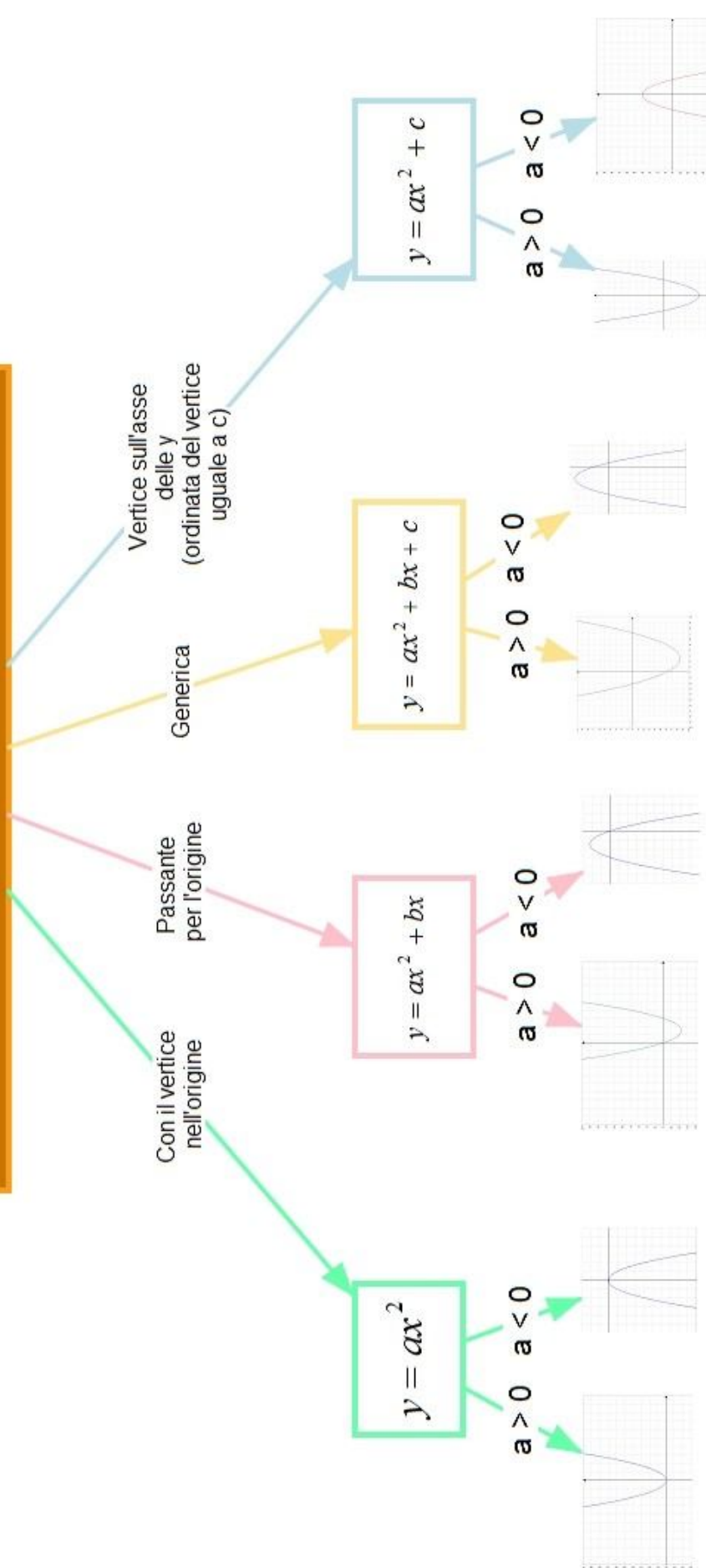
$y = ax^2$	$b = 0 \quad c = 0$	$F\left(0; \frac{1}{4a}\right)$	
Esempio $y = \frac{7}{10}x^2$	Il vertice coincide con l' origine degli assi $V(0;0)$ L' asse coincide con l'asse delle ordinate	$d) \quad y = -\frac{1}{4a}$	
$y = ax^2 + bx$	$c = 0$	La parabola passa per l'origine degli assi	
Esempio $y = x^2 - 4x$			
$y = ax^2 + c$ Esempio $y = \frac{3}{5}x^2 + 1$	$b = 0$	La parabola ha il vertice sull' asse y , che è anche l'asse della parabola. L'ordinata del vertice è pari al termine noto c $V(0;c)$	

La variazione della concavità

$0 < a < 1$		$-1 < a < 0$	
$a = 1$		$a = -1$	
$a > 1$		$a < -1$	



Tipi di parabola (asse parallelo ad asse y)





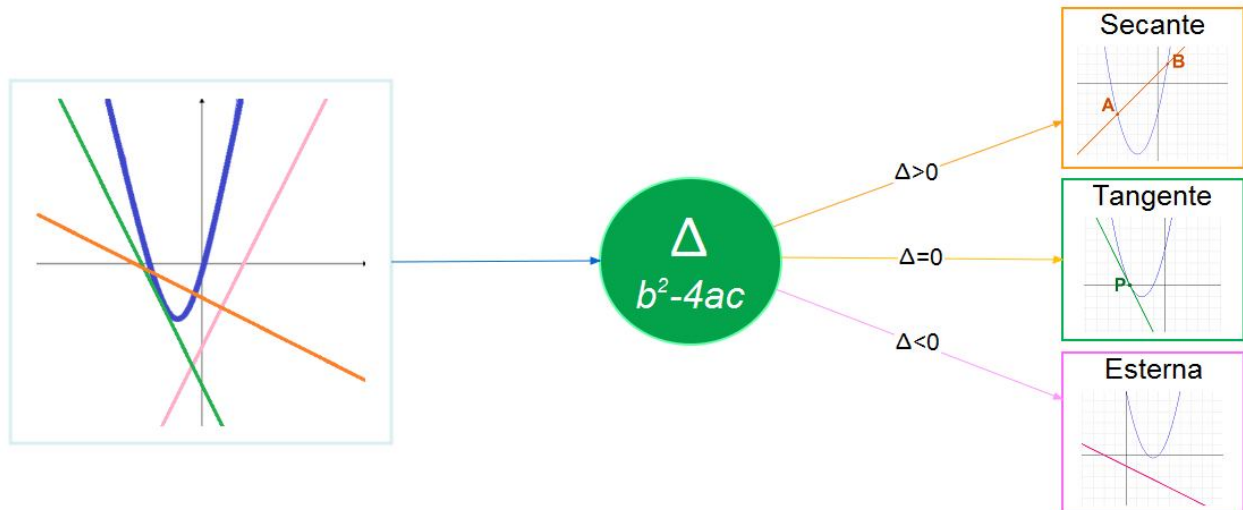
Disegnare una parabola

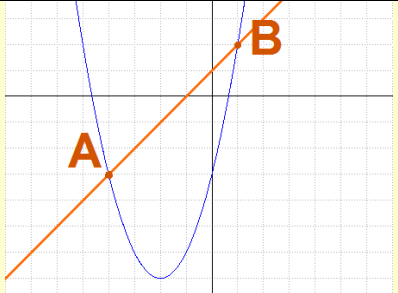
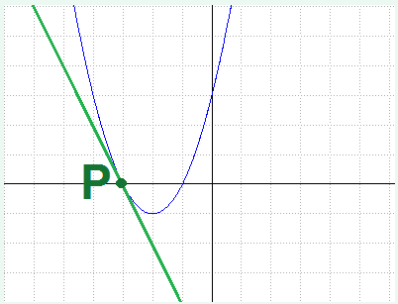
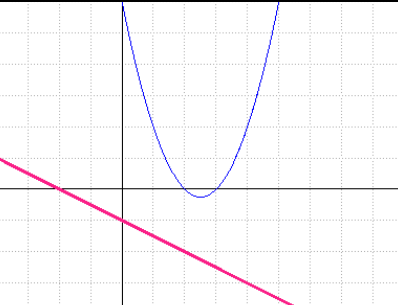
Procedura	Operazione	Esempio	Grafico
<p>Data l'equazione della parabola</p> <p>Esamino la</p> <p>Concavità</p> <p>Calcolo le coordinate del</p> <p>Vertice</p> <p>Ricerca</p> <p>Intersezione asse x</p> <p>Ricerca</p> <p>Intersezione asse y</p>	$y = ax^2 + bx + c$ <p>Concavità</p> $a > 0 \quad + \quad \cup$ $a < 0 \quad - \quad \cap$	$y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$	
	<p>Coordinate del Vertice</p> $V\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$ <p>Dove $\Delta = b^2 - 4ac$</p>	<p>Calcolo il discriminante</p> $\Delta = 1 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(-4) = 1 + 8 = 9$ $V\left(-1; \frac{-9}{2}\right)$	
	<p>Ricerca dei punti di intersezione con l'asse x</p> $\begin{cases} y = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$	$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4 \end{cases}$ <p>Da cui $A(-4;0) \quad B(2;0)$</p>	
	<p>Ricerca dei punti di intersezione con l'asse y</p> $\begin{cases} x = 0 \\ y = x^2 + ax + c \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4 \end{cases}$ <p>Da cui $C(0;-4)$</p>	

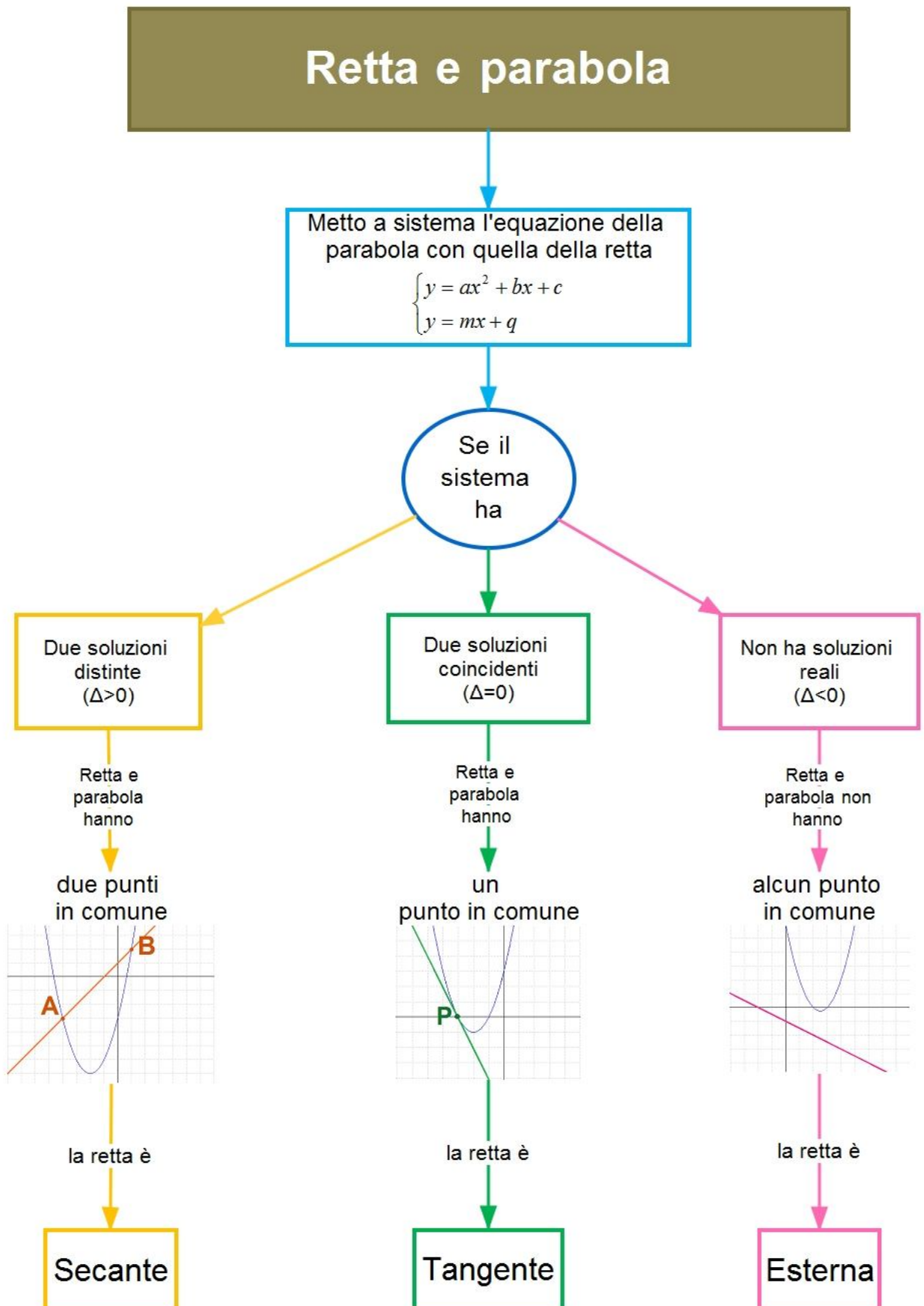
Retta e parabola

Una retta non parallela all'asse, rispetto ad una parabola, può essere **secante**, **tangente** oppure **esterna**.

Per verificare la posizione tra retta e parabola e calcolare eventuali punti di intersezione, metto a sistema l'equazione delle due curve	$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$
Svolgo il sistema ed ottengo l' equazione risolvente	$\begin{cases} ax^2 + bx - mx + c - q = 0 \\ y = mx + q \end{cases}$
Individuati i parametri a , b e c , trovo il Δ dell'equazione	$\Delta = b^2 - 4ac$



Posizione	Disegno	Esempio
$\Delta > 0$ la retta è secante (2 soluzioni distinte)		$\begin{cases} y = x^2 + 4x - 3 \\ y = x + 1 \end{cases}$ $x^2 + 4x - x - 3 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$ $\Delta = 9 + 16 = 25 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{Secante}$ Si può verificare che le due figure si incontrano nei punti $A(-4, -3)$ $B(1; 2)$
$\Delta = 0$ la retta è tangente (2 soluzioni coincidenti)		$\begin{cases} y = x^2 + 4x + 3 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$ $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \text{Tangente}$ Calcolo l'ascissa del punto Q di tangenza ed ottengo $x = -1$. Sostituendo nella seconda equazione, trovo l'ordinata del punto Q che è $y = 0$ $Q(-1; 0)$
$\Delta < 0$ la retta è esterna (Non ci sono soluzioni)		$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ y = -x - 1 \end{cases}$ $x^2 - 4x + 5 = 0$ $\Delta = 16 - 20 = -4 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{Esterna}$ La retta e la parabola non si incontrano in alcun punto



Diario di Matematica
è stato ideato da



Accademia della Scienza

SOCIETA' COOPERATIVA SOCIALE

www.accademiadellascienza.it
via dei Mille 2/3, Savona

Alessandro Venturelli

Professore di matematica e fisica per le scuole superiori

Leandro Odella

Ingegnere gestionale e Presidente della
Cooperativa Accademia della Scienza

Monica Bertelli

Psicologa e tutor per l'apprendimento Referente doposcuola
specializzati per DSA e docente in corsi di Alta Formazione

Elettra Cerruti

Logopedista, perfezionata in psicopatologia dell'apprendimento,
formatrice AID; lavora presso Il Servizio di Neuropsicopatologia
dell'Età Evolutiva della Asl 2 Savonese



Mappe e materiale digitale
www.accademiadellascienza.it/diario

Realizzato con la collaborazione di



AID



ANASTASIS

Anastasis

ISBN 978-88-87730-35-7